

## Kapitel 19

# Brownsche Bewegung und Stochastische Differenzialgleichungen

Lukas Reitemeier

Folgende Seiten beschäftigen sich mit zur harmonischen Analysis gegensätzlichen Konzepten, wie zufälligen Verläufen und Störungen. Durch das Beleuchten konträrer Eigenschaften und dem Verschmelzen beider Themen, entsteht hoffentlich ein wertvoller Beitrag zum Verständnis des Buchthemas.

Dieses Kapitel befasst sich mit der Brownschen Bewegung und stochastischen Differenzialgleichungen — zwei eng verbundene Themen, welche interdisziplinär in vielen verschiedenen Gebieten zur Anwendung kommen.

Die Entdeckungsgeschichte widerspiegelt diese Interdisziplinarität. Der Botaniker Robert Brown entdeckte im 19. Jahrhundert, dass in Flüssigkeit suspendierte Pollenteilchen unter seinem Mikroskop scheinbar zufällige Bewegungen ausführten. Der französische Mathematiker Luis Bachelier, der für seine Arbeit *Théorie de la Spéculation* in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Finanzmathematik bekannt ist, hat die erste mathematische Modellierung einer Brownschen Bewegung versucht, analog zu Fluktuationen von Börsenkursen. Später trug der Physiker Albert Einstein mit seiner Arbeit *Untersuchungen über die Theorie der "Brownschen Bewegung"* maßgeblich zum theoretischen Verständnis dieses beobachteten Phänomens bei. Dies wiederum diente dem Mathematiker Norbert Wiener als Grundlage für die Entwicklung des Wiener Prozesses, welcher ein zentrales Konzept in der Wahrscheinlichkeitstheorie darstellt. Bei stochastischen Differenzialgleichungen (SDGL) wird dieser Wienerprozess genutzt, um sogenanntes weisses Rauschen bei der Modellbildung zu berücksichtigen.

Dank all diesen Entdeckungen ist es heute möglich Finanzmathematik zu betreiben, bessere Populationsmodelle zu erstellen und den Prozess der Diffusion mathematisch zu beschreiben. Viele dieser Systeme können sensibel auf Störeinflüsse stochastischer Natur reagieren. Auf diesen Umstand und wie man damit umgehen kann, darauf wird am Ende dieses Kapitels noch eingegangen.

## 19.1 Brownsche Bewegung

Als der Schottische Botaniker Robert Brown im Jahr 1827 in sein Mikroskop schaut, beobachtet er kleine Pollen-Partikel in einer Flüssigkeit. Er bemerkt, dass sich die Teilchen scheinbar zufällig bewegen, obwohl keine Kräfte auf die Teilchen einwirken. Eine Erklärung hatte Robert Brown zu diesem Zeitpunkt für das Verhalten noch nicht.

Es dauerte fast ein Jahrhundert, bis Albert Einstein diese Beobachtung auf ein solides theoretisches Fundament stellte und so nutzbar machte. Er schloss darauf, dass die unregelmäßige Bewegung auf Kollisionen mit umgebenden Molekülen zurückzuführen ist, welche ständig in Bewegung sind. Albert Einstein entwickelte eine mathematische Theorie, mit welcher die beobachtete Bewegung durch stochastische Zusammenstöße von Molekülen erklärt werden kann. Weiter konnte er auch einen Zusammenhang zwischen den Messungen der Bewegung, der Boltzmann-Konstante und der Avogadro-Zahl herstellen<sup>1</sup>.

Dies hatte auch Auswirkungen auf das Verständnis von Materie, da dies einen direkten empirisch Beleg für die Existenz von Atomen und Moleküle lieferte. Die sogenannte Atomhypothese besagt, dass Materie aus diskreten unteilbaren Einheiten besteht, sprich einzelnen Atomen oder ganzen Molekülen. Man muss dazu sagen, dass es schon zuvor Indizien für deren Existenz gab, doch es fehlte am entscheidenden experimentellen Beweis. Die *Einstein-Smoluchowski-Gleichung* ist eine zentrale Gleichung seiner Arbeit, welche die mittlere quadratische Verschiebung (MSD: *Mean square displacement*) beschreibt

$$\text{MSD} = 2nDt \quad (19.1)$$

in Beziehung zur Diffusionskonstanten  $D$ , der Anzahl Raumdimensionen  $n$  und der Zeit  $t$ .

Die Avogadro-Zahl  $A$  kann indirekt über die *Stokes-Einstein-Gleichung*, anhand von Messungen berechnet werden. Die Diffusionskonstante  $D$  kann dabei mittels des Radius des suspendierten Teilchens, der Boltzmann-Konstante  $k$ , der Temperatur  $T$  und der Viskosität  $\eta$  des umgebenden Mediums, beschrieben werden:

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r} \quad (19.2)$$

$r$  beschreibt dabei den Radius des suspendierten Teilchens. Die Boltzmann-Konstante  $k$  kann auch durch die allgemeine Gaskonstante  $R$  und die Avogadro-Zahl  $A$  ausgedrückt werden:  $k = R/A$

So ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$A = \frac{RT}{D(6\pi\eta r)} \quad (19.3)$$

So ermöglichen die beiden Gleichungen einen experimentellen Ansatz zur Bestimmung der Avogadro-Zahl und ferner die quantitative Analyse der brownischen Bewegung.

## 19.2 Harmonische Systeme und Rauschen

Um dem Thema des Buches gerecht zu werden und dieses Kapitel einzugliedern, kann die harmonische Analysis als essenzielles Werkzeug betrachtet werden, um mit Rauschen umzugehen und dieses zu charakterisieren. So ist zum Beispiel die *Fast Fourier Transform* eine wichtige Methode,

<sup>1</sup>Die Avogadro-Zahl ( $N_A$ ) ist die Anzahl Teilchen (Atome oder Moleküle) welche in einem Mol einer Substanz enthalten sind. Die Boltzmann-Konstante ( $k$ ) ist eine physikalische Konstante, die den Zusammenhang zwischen der thermischen Energie und der Temperatur eines Systems herstellt. Beide Konstanten sind miteinander verbunden durch die Gleichung  $k = \frac{R}{N_A}$ , wobei  $R$  die allgemeine Gaskonstante ist.

um periodische Signale von Rauschen unterscheiden zu können. Weiter können mittels harmonischer Analysis auch Filter entwickelt werden, welche ein Signal von Rauschen befreien. Ein gutes Beispiel dafür sind Bandpassfilter, welche nur ein bestimmtes Band an Frequenzen durchlassen.

Durch die Analyse von Systemantworten auf verschiedene harmonische Anregungen kann eine Aussage getroffen werden, wie das System auf Rauschen — also eine zufällige Störung — reagieren könnte.

All diese Beispiele basieren auf Methoden der harmonischen Analysis, um den Bogen zur Anfangsbemerkung dieses Kapitels zu schliessen: Durch Zufälle kann Rauschen entstehen, was meist ungewollt ist. Dank Methoden der harmonischen Analysis ist es möglich diese gegenteiligen Eigenschaften zu untersuchen und zu bewerten.

### 19.2.1 Was ist Rauschen?

Rauschen ist in vielen technischen und wissenschaftlichen Disziplinen ein wichtiger Faktor. So kann es auch in verschiedenen Kontexten unterschiedlich definiert werden. Zum Beispiel in der Signal- und Kommunikationstechnik kann Rauschen als ungewollte Störung, basierend auf einem deterministischen Zusammenhang oder einem stochastischen Prozess, beschrieben werden. Eine Störung durch das Magnetfeld von Stromkabeln, in welchen Wechselstrom mit 50 Hz pulsiert ist eine deterministische Störungen. Störungen, welche durch kosmische Teilchen ausgelöst werden, die eine Wechselwirkung auf einen Empfänger oder ein Messgerät haben, kann man als Zufall erachten.

Rauschen wird vielfach neben der Intensität bezüglich des Frequenzbereichs und der Verteilung der Amplituden, also deren Leistungsdichte im Frequenzspektrum, charakterisiert. Mathematisch können unterschiedliche Arten von Rauschen beschrieben werden, einige der wichtigsten sind folgende:

#### Definition 19.1. Weisses Rauschen:

- *Alle Frequenzen haben die gleiche Amplitude.*
- *Die spektrale Leistungsdichte ist konstant über alle Frequenzen.*

Ein Beispiel dafür ist das Rauschen von Radios, wenn die Frequenz nicht korrekt eingestellt ist, ausgelöst durch Störeinflüsse wie zum Beispiel: Elektrische Interferenzen, kosmische Einflüsse oder auch Blitzentladungen. Analog zu weissem Licht, kann weisses Rauschen so interpretiert werden, dass sich verschiedene Frequenzen überlagern, wobei anzumerken ist, dass weisses Licht keine konstante Leistungsdichte im Spektrum aufweist.

#### Definition 19.2. Rosa Rauschen

- *Die Amplitude des Rauschens nimmt mit zunehmender Frequenz ab, ist also invers proportional zur Frequenz  $1/f$ .*
- *Ist technisch in der Elektronik relevant und mit 3 dB Abfall der Leistungsdicht pro Oktave charakterisiert.*

Um bei einem hörbaren Beispiel zu bleiben: Rosa Rauschen klingt als Schall ausgewogener und “weicher” als weißes Rauschen. Dies, da unangenehme hohe Frequenzen wegfallen. Der Begriff “Rosa” ist eine Analogie zum sichtbaren Licht, bei dem tiefere Frequenzen auch eher rötlich erscheinen und überlagert mit Weiss (weisses Rauschen), Rosa ergeben.

#### Definition 19.3. Braunes Rauschen (Brownsches Rauschen):

- Die Leistungsdichte nimmt im Spektrum mit zunehmender Frequenz invers quadratisch ab ( $1/f^2$ ).
- Ist auch technisch relevant und mit 6 dB Abfall der Leistungsdicht pro Oktave charakterisiert.

"Braun" bezieht sich hier nicht auf eine Farbe, sondern ist Robert Brown gewidmet. Denn die Brownische Modekühlbewegung entspricht diesem Rausch-Typ, da sich die beobachteten trägen Moleküle mit zunehmender Frequenz verstärkt gegenseitig behindern.

**Definition 19.4. Gaussisches Rauschen:**

- Die Amplituden im Leistungsspektrum weisen eine Normalverteilung (Gaussverteilung) um eine zentrale Frequenz auf.

Diese Art von Rauschen ist auf digitalen Bildern zu finden deshalb speziell für die digitale Bildverarbeitung relevant. Die örtliche Verteilung des Rauschens im Bild kann um eine zentrale Frequenz charakterisiert werden.

**Definition 19.5. Impulsrauschen:**

- Plötzliche, unerwartete Spitzen der Amplitude
- Nicht kontinuierlicher Signalverlauf (skalierter Impuls)
- Eine unregelmässig verteilte Leistungsdichte

In der Bildverarbeitung ist diese Art von Rauschen als *salt & pepper Rauschen* bekannt, bei dem einzelne Pixel plötzlich extreme Werte annehmen. Dies wirkt visuell auf dem Bild wie verstreutes Salz oder Pfeffer - sprich extrem schwarze oder weisse Punkte.

Es gibt noch viele weitere Unterscheidungen, doch auf diese wird nicht eingegangen.

Es gibt auch Signale, welche wie Rauschen wirken können, jedoch je nach angewandter Definition kein Rauschen sind. So zum Beispiel hochfrequente überlagerte Schwingungen. Diese Überlagerungen sind in der Nachrichtentechnik häufig anzutreffen als auf modulierte Signale oder auch überlagerte Signale verschiedener Frequenzen um mehr Information über den selben Signalträger zu senden — hochfrequente überlagerte Schwingungen können also Informationsträger und Störsignal gleichzeitig sein.

In den zwei Abbildungen 19.1 und 19.2 sind zwei Signale aufgetragen, eines stellt echtes stochastisches Rauschen dar, das andere besteht aus vielen hochfrequenten überlagerten Schwingungen. Dieses Beispiel soll verdeutlichen, dass es nicht reicht, nur den zeitlichen Verlauf eines Signals zu betrachten. So könnte man fälschlicherweise die Signale als ähnlich erachten - eine krasse Täuschung, welche sich im Frequenzspektrum klar zeigt. Um das Signal zu verstehen, sind also die Methoden der harmonischen Analysis essenziell.

## 19.2.2 Rauschen mittels Random Walk oder Wiener Prozess

Um Rauschen zu modellieren muss als Grundlage ein stochastischer Prozess definiert werden. Zwei weit verbreitete Konzepte sind dabei der *random walk* und der Wienerprozess.

**Definition 19.6. Random Walk:** Bei einem Random Walk beginnt man an einem Ausgangspunkt (normalerweise 0) und macht bei jedem Zeitschritt eine zufällige Schritt vor oder zurück. Oft dient dazu die Binominalverteilung, wobei auch asymmetrische Verteilungen verwendet werden können.

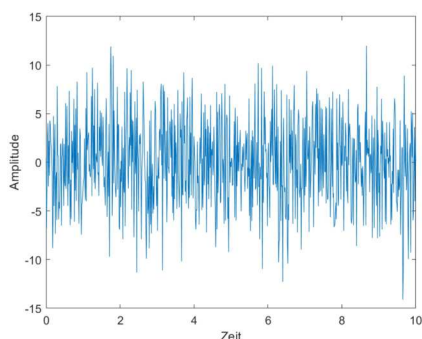


Abbildung 19.1: Echtes weißes Rauschen

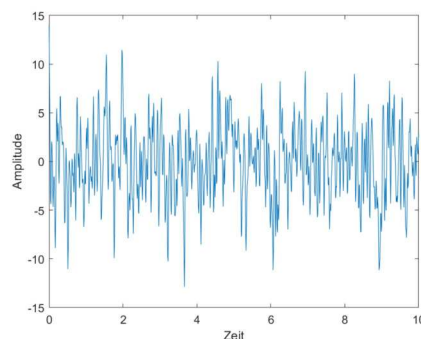


Abbildung 19.2: Überlagerte harmonische Schwingungen

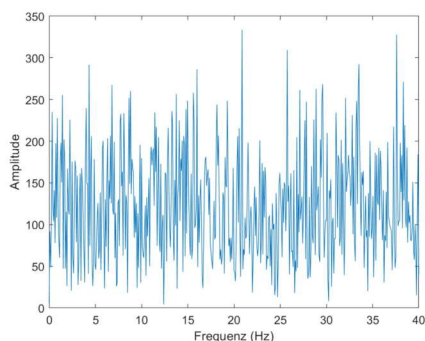


Abbildung 19.3: FFT eines weißen Rauschsignals

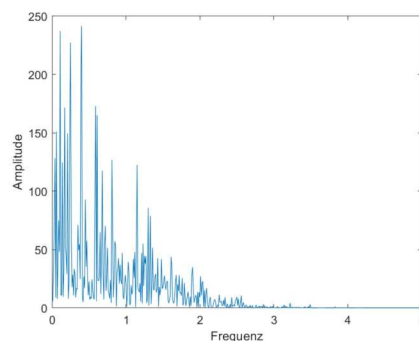


Abbildung 19.4: FFT von überlagerten harmonischen Schwingungen

Die Schrittlänge und Richtung kann ebenfalls durch eine unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt werden oder als konstant definiert werden. Dieses Verfahren zeichnet sich durch eine einfache numerische Implementation aus, da es per Definition schon diskret ist.

**Definition 19.7. Wienerprozess:** Der Wienerprozess ist ein kontinuierlicher stochastischer Prozess. Er kann als Grenzwert eines Random Walks erachtet werden, sofern die Zeitschritte gegen null gehen und die Schrittlängen normalverteilt sind. Speziell dabei ist, dass unabhängig von der verstrichenen Zeit der Erwartungswert dem Ausgangswert entspricht.

Der Wienerprozess muss also folgende Eigenschaften erfüllen:

1.  $W(0) = 0$ ; Der Startwert von  $t = 0$  ist 0.
2.  $W(t_1) - W(t_2)$  ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz  $t_1 - t_2$ .
3. Zu jedem weiteren Zeitpunkt  $t_n$  ist die Zufalls-Variable unabhängig von allen vorhergehenden Werten. Dies wird auch die Markow-Eigenschaft genannt, wenn der Übergang in einen neuen Zustand nicht vom vorherigen Verlauf abhängt.

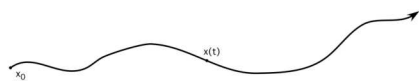


Abbildung 19.5: Ideales Signal

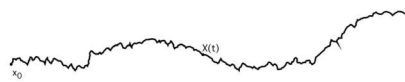


Abbildung 19.6: Reales Signal

Weiter wird auf den Wienerprozess jedoch nicht eingegangen, da dieser ausführlich im Kapitel „8.1 Modell für Rauschen: der Wienerprozess“, des Buches vom Mathematischen Seminar über Differenzialgleichungen beschrieben wird.

### 19.2.3 Implikationen

Eines der grössten Probleme im Zusammenhang mit Rauschen ist die Differenzierbarkeit. Dies ist häufig beim Umgang mit Mess-Signalen Fall. Die eigentliche Messung ist gestört, was das bestimmen einer lokalen Steigung und somit die Änderungsrate der Messgrösse verfälschen kann. Auch empfangene Datensignale sind oft verrauscht, was das Dekodieren der darin enthaltenen Information erschwert oder sogar verfälscht.

Die einfachste Methode und häufig auch ein erster Schritt in der Signalverarbeitung ist die Anwendung eines Tiefpass- oder Bandpass-Filters. Dieser entfernt jedoch nicht nur das Rauschen, sondern auch ein Teil der im Signal enthaltenen Information.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht, wenn anhand von Messdaten ein Modell erstellt werden soll, welches das Verhalten der Messdaten widerspiegelt. Dabei kann es sein, dass man das Rauschen als Teil des Systems sieht oder rein als externe Störung. Im einen Fall muss zwischen System und Rauschen unterschieden werden, im anderen Fall muss das System Rauschen abbilden können.

Ist ein System anhand einer gewöhnlichen Differenzialgleichung (DGL) gegeben, kann das Verhalten des Systems unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen vorhergesagt werden. Vom Anfangswert aus entwickelt sich die Funktion gemäss der Startbedingung und dem durch die DGL gegebenen Vektorfeld.

In vielen Bereichen entspricht ein solch deterministisches System nicht der Realität und suggeriert eine Aussagekraft, welche sich nicht mit Beobachtungen deckt. Es gibt viele Systeme, welche stark auf kleine Störeinflüsse reagieren. Dies führt dazu, dass sich die Lösung einer DGL gegenüber der Realität, zum Beispiel durch Rauschen, nicht perfekt deckt oder das Resultat sogar komplett divergiert. Ein gutes Beispiel dafür ist folgendes System:

$$\frac{dx}{dt} = -y \quad (19.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 + y \quad (19.5)$$

In der Abbildung 19.7 sind zwei unterschiedliche Trajektorien im Vektorfeld eingezeichnet, welches durch die Gleichung 19.5 gegeben ist. In rot ist der Verlauf im Intervall  $t = [0, 3]$  mit dem Startwert  $(-1.7, -1.4)$  gegeben und in grün mit dem Startwert  $(-1.8, -1.4)$ .

Dieses System veranschaulicht schön, wie sich eine kleine Störung der Startbedingung auf den Verlauf der Lösung auswirken kann. In diesem speziellen Fall konvergieren die Lösung zu einem späteren Zeitpunkt  $t$  wieder. Bedenkt man nun, dass eine solche Störung durch Rauschen herbeigeführt werden könnte, scheint es unsinnig, eine einzige fixe Lösung für ein solches System anzugeben — zumindest nicht ohne auf die Aussagekraft der Lösung unter Rauscheinfluss hinzuweisen oder den Lösungsraum genauer zu spezifizieren.

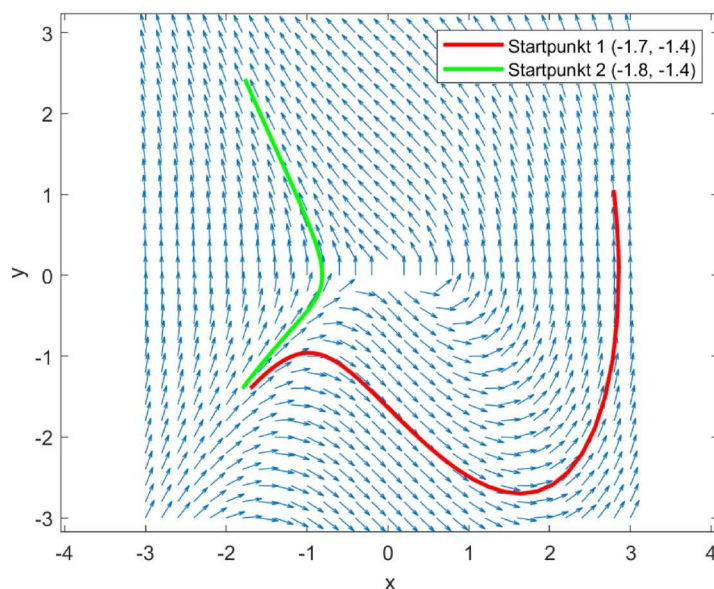


Abbildung 19.7: Zwei Pfade mit fast gleichem Startpunkt

Es gibt auch Systeme, welche bei kleinen Störungen aus einem stabilen Zustand in einen instabilen Zustand übergehen und komplett divergieren. In solchen Fällen kann es ein fataler Fehler sein, zufällige Störungen des Systems nicht zu berücksichtigen. Andere Systeme beinhalten selbst eine zufällige Komponente, welche nicht vernachlässigt werden soll.

Um diesem Umstand gerecht zu werden, kann man die Möglichkeit von zufälligen Störungen beim Aufstellen eines Modells miteinbeziehen (in diesem Fall *white noise*). Anstatt eine fixe Lösung zum Zeitpunkt  $t$  anzugeben, kann man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die verschiedenen möglichen Endzustände angeben — et. voilà, man hat den Lösungsraum einer stochastischen Differenzialgleichung (SDGL).

### 19.3 Stochastische Differenzialgleichungen

Formal kann eine stochastische DGL folgendermaßen notiert werden:

$$\dot{X}(t) = b(X(t)) + B(X(t))\xi(t) \quad (t > 0) \quad (19.6)$$

In diesem Fall ist die Störung durch sogenanntes  $m$  dimensionales weisses Rauschen  $\xi(t)$  modelliert.  $B$  ist die sogenannte Dispersionsmatrix mit der Dimension  $n \times m$ . Sie beschreibt, wie sich die Störung auf die unterschiedlichen inneren Zustände des Systems auswirkt. Dabei beschreibt die Diagonale der Matrix wie stark sich das Rauschen auf jede Dimension auswirkt und die Dreieckbereiche der Matrix beschreiben die Beeinflussung der Dimensionen untereinander.  $b$  ist der Drift-Vektor und beschreibt die erwartete Veränderung für jeden inneren Zustand / jede Dimension des Systems. Alles in allem beschreiben  $b$  und  $B$  die Dynamik des Systems.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \vdots & B_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \vdots & B_{nm} \end{pmatrix}$$

Für die Modellierung von stochastischem Verhalten, ist der Wiener Prozess  $W(t)$  ein zentrales Konzept, zumal *White noise*  $\xi(t)$  als die Ableitung vom Wienerprozess  $\frac{dW(t)}{dt}$  modelliert werden kann. Somit kann die SDGL aus 19.6 folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(X(t)) + B(X(t)) \frac{dW(t)}{dt} \quad (t > 0) \quad (19.7)$$

Nun sollte man mit  $dt$  multiplizieren, da die Gleichung sonst impliziert, dass man weisses Rauschen weiter differenzieren kann. Weisses Rauschen  $\frac{dW(t)}{dt}$  ist per Definition nicht sinnvoll weiter differenzierbar. Dies ist den Eigenschaften des Wienerprozesses geschuldet. Gemäß der Definition ändert sich die Zufallsvariable in jedem Schritt entsprechend dem Erwartungswert und der Varianz, ohne dabei von vorhergehenden Werten abzuhängen.

Bei SDGLs wird das  $dt$  im Nenner oft mit  $dt$  multipliziert, um die Gleichung in die sogenannte "Ito-Form" zu bringen, welche vielfach auch ein erster Schritt im weiteren Umgang ist.

$$dX(t) = b(X(t))dt + B(X(t))dW(t) \quad (19.8)$$

### 19.3.1 Simulation mittels der Euler-Maruyama-Methode

Die brownsche Bewegung kann relativ einfach mittels der Euler-Maruyama-Methode simuliert werden. Diese numerische Methode wird oft zur Simulation von stochastischen Differentialgleichungen (SDGLs) verwendet und basiert auf der bekannten Euler-Methode zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Idee ist, die SDGL in diskrete Zeitschritte zu zerlegen und den deterministischen und stochastischen Anteil separat zu behandeln. Die Methode hat zwar gewisse Einschränkungen bezüglich ihrer Genauigkeit und Stabilität, ist aber dennoch mitunter auf Grund ihrer Einfachheit weit verbreitet.

Um die SDGL mittels der Euler-Maruyama-Methode zu simulieren, geht man wie folgt vor:

1. Man wählt eine Schrittweite  $\Delta t > 0$  und teilt das Zeitintervall  $[0, T]$  in  $N$  gleich große Teilintervalle der Länge  $\Delta t$ :  $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_i = i\Delta t, \dots, t_N = T$ .
2. Für jeden Zeitschritt  $i$  von 0 bis  $N - 1$  werden die Werte der Funktion  $X(t)$  an den diskreten Zeitpunkten  $t_i$  berechnet,

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + a(X(t_i), t_i)\Delta t + b(X(t_i), t_i) \sqrt{\Delta t} \cdot Z_i, \quad (19.9)$$

wobei  $Z_i$  unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind.

3. Diese Berechnungen führt man iterativ für alle Zeitschritte durch.

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n, t_n)\Delta t + g(X_n, t_n)\Delta W_n \quad (19.10)$$



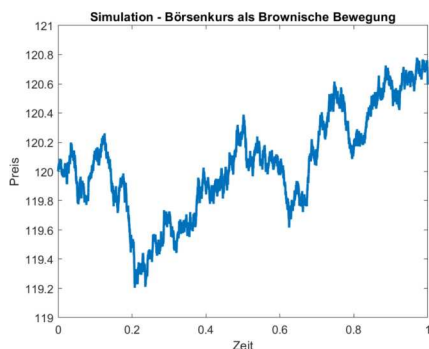


Abbildung 19.8: Aktienkurs als 1D brownische Bewegung

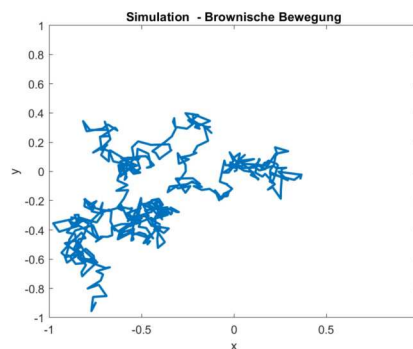


Abbildung 19.9: Brownschen Bewegung multipliziert in 2D

Diese Funktion  $f(X_n, t_n)$  beschreibt den deterministischen Teil der SDGL, im Kontext der brownischen Bewegung kann man es "Drift" nennen, welcher nicht nur von zufälligen Einflüssen bestimmt ist. Man muss jedoch erwähnen, dass er Erwartungswert zu jedem Zeitpunkt dem Startwert entspricht, also der zu erwartende Drift 0 ist.

Dies ist auch der Teil, der durch eine harmonische Analyse untersucht werden kann. Das Rauschen (*white noise*), welches hier mit  $g(X_n, t_n)$  beschrieben ist, enthält keine Information und kann somit nicht analysiert werden.  $\Delta W$  beschreibt die Geschwindigkeit, mit welcher der stochastische Prozess ablaufen soll und  $W_n$  beschreibt den Wienerprozess oder die brownische Bewegung als Ganzes.

In der Abbildung 19.8 wurde diese Simulations-Methode in einer Dimension angewandt. Man kann vielleicht schon erahnen, dass die zugrundeliegende Mathematik auf Börsenkurse anwendbar sein könnte. Führt man die Simulation für zwei Achsen durch und verbindet die einzelnen Simulationsschritte mit Linien, ergibt sich das Bild einer typischen brownischen Bewegung, wie dies in der Abbildung 19.9 zu sehen ist.

### 19.3.2 ITO

Itô Kiyoshi war ein japanischer Mathematiker, der seine Karriere der Stochastik widmete und heute als Begründer der stochastischen Analysis erachtet werden kann. So legte er auch einen Grossteil des Fundaments auf dem der Umgang mit stochastische Differenzialgleichungen beruht.

Nach ihm ist auch die *Itô'sche Form* einer SDGL benannt, bei welcher die Gleichung mit dem Nenner des Differenzialquotienten multipliziert wird. Diese Form ist Ausgangslage viele seiner Konzepte, bietet jedoch auch den Vorteil, dass keine Differenzierbarkeit suggeriert wird.

Ein wichtiges Werkzeug, um mit stochastischen Differenzialgleichungen umzugehen ist das Äquivalent zur Kettenregel, dem sogenannten *Lemma von Ito*.

Hier ein Beispiel einer stochastischen Differentialgleichung (SDGL) für einen Prozess  $X(t)$  in *Ito-Form*:

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW \quad (19.11)$$

Angenommen, wir haben eine Funktion  $f(X, t)$ , wobei  $X$  die Lösung der obigen SDGL ist, dann kann die Änderung von  $f$  in Bezug auf  $X$  und  $t$  wie folgt geschrieben werden:

Die Funktion  $f(X,t)$  und das *Ito-Lemma*:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX)^2 \quad (19.12)$$

Dieses Lemma erlaubt es uns, Differentialgleichungen für Funktionen von stochastischen Prozessen abzuleiten, was bei der Lösung von SDGs hilfreich ist.

Das Einsetzen der SDG in das Ito-Lemma ergibt:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} (adt + bdW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (b^2 dt) \quad (19.13)$$

Die Funktion  $a(X, t)$  ist der *Drift-Term*, der den deterministischen Teil der Bewegung darstellt, während  $b(X, t)$  der sogenannte *Diffusions-Term* ist, welcher den stochastischen Teil der Bewegung darstellt.